# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ АСИНХРОННОЙ СЕТИ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ С ОБХОДНЫМИ НАПРАВЛЕНИЯМИ

**Тулемисова Г.Е.**

*Институт проблем информатики и управления МОН РК, Казахстан, E-mail:*office@ipic.kz

Пусть топологическая структура сети ATM (Asynchrous Transfor Mode) [1], представляется неориентированным графом $G=\{V,L\}$, где $V-$ множество узлов сети, $L=\{(ik)\}$ – множество ветвей, соответствующих трактам передачи информации, $i,k$ = 1,2,...n – соседние узлы, n – число узлов множества V. В описываемой модели сеть ATM рассматривается как СМО с явными потерями. Качество обслуживания на такой сети обычно оценивается значениями элементов некоторого множества $P=\{p_{ik}\}$, где элемент $p_{ik}$ – вероятность потерь нагрузки на ветви. Так как сеть ATM представляется как система обслуживания с явными потерями, то для всех $(ik)\in L$ величина $p_{ik}$ принимает значения в интервале (0;1], если $(ik)\notin L$ $(ik)$, то $p_{ik}=0$.

Пусть $r_i(j)$ – есть средняя интенсивность потока многоканальных вызовов (МВ), поступающего в сеть ATM в узел-отправитель $i$ и предназначенного узлу–адресату $j$. Величину $r_i(j)$ будем называть входной нагрузкой сети ATM, которая представляет собой среднее значение поступающей нагрузки между соответствующими парами узлов в час наибольшей нагрузки (ЧНН).

Пусть $t_i(j)$ – средняя интенсивность общего потока МВ, проходящего через узел $i$ и предназначенного узлу $j$. Величину $t_i(j)$ будем называть узловой нагрузкой сети ATM. Она включает в себя как входную нагрузку $r_i(j)$, так и нагрузки $t_l(j)$, поступающие в узел $i$ со всех смежных с ним узлов $l$.

При определении параметров качества обслуживания на сети ATM делаются следующие допущения [2] :

- исходные потоки МВ, поступающие в сеть являются пуассоновскими;
- система находиться в состоянии статистического равновесия;
- система с явными потерями;
- не учитываются потери в коммутационных и управляющих устройствах;
- время установления соединения равно нулю.

Величина пропущенной или избыточной нагрузки зависит от вероятности потерь трафика $t_i(j)$, распределяемого на ветвь $(ik)$. Пусть $j\in J$, где $j$ – множество всех узлов адресатов. Тогда для многоадресного случая, т.е. когда | $j$ | > 1, предполагаем, что расположенная на каждом узле система распределения нагрузки функционирует в режиме разделенного обслуживания (отдельно по каждому адресату). Это означает, что на ветви $(ik)$ число временных каналов подразделяется на разряды, каждый из которых представляет собой группу обслуживающих устройств в составе временного цикла, необходимую для передачи нагрузки только для узла-адресата $j$.

Пусть $p_{ik}(j)$ – вероятность потерь нагрузки $t_i(j)$ на ветви $(ik)$ Так как сеть ATM представляется системой обслуживания с явными потерями, то $p_{ik}(j)$ принимает значения в интервале (0;1] для каждой ветви $(ik)$, участвующей в передаче нагрузки $t_i(j)$. В противном случае или если $(ik)\notin L$, полагаем $p_{ik}(j)$ = 0. Расчет вероятностей потерь относительно каждого адресата в сети ATM с обходными направлениями осложняется тем, что эти вероятности в общем случае зависят от вероятностей потерь на всех остальных ветвях. Эта зависимость, с учетом заданного плана распределения потоков информации, представляется сложной системой нелинейных уравнений, которая будет описана ниже.

Пусть $\varphi_{ik}(j)$ –мера, характеризующая значение избыточной нагрузки сети АТМ для всех ветвей, предшествующих по выбору направлению $(ik)$ Другими словами величина $\varphi_{ik}(j)$ есть доля нагрузки $t_i(j)$, поступающая на ветвь $(ik)$ в соответствии с планом распределения. Она равна 0 , если ветвь $(ik)$ не используется ни в одном из путей соединяющие узлы $i$, $j$, и равна 1 , если ветвь $(ik)$ является ветвью пути первого выбора. В состав доли $\varphi_{ik}(j)$ включаются вероятности потерь всех предшествующих данной ветви $(ik)$ направлений. Обозначим через $\bar{K}_i(j)$ множество таких узлов $\bar{k}$, которые из узла $i$ образуют все предшествующие ветви $(ik)$ исходящие направления. Величина $\varphi_{ik}(j)$ представляет собой вероятность занятости обслуживанием направлений $(i,\bar{k})$, т.е.

$$\varphi_{ik}(j)=\varphi_{i\bar{k}}(j)p_{i\bar{k}}(j)=\prod_{\bar{k}\in\bar{K}_i(j)}p_{i\bar{k}}(j) \tag{1}$$

Произведение $\varphi_{ik}(j)\;\; p_{ik}(j)$ – есть доля избыточной нагрузки на ветви $(ik)$, которая в зависимости от плана распределения нагрузок будет передаваться на другие свободные для узла $i$ направления, а в отсутствии таковых, в узле $i$ она вообще будет теряться. При этом, нагрузка $t_i(j)$ считается потерянной в узле $i$, если заняты временные каналы на всех исходящих направлениях $(ik)$.

Введем следующее обозначение

$$h_{ik}(j)=\varphi_{ik}(j)[1-p_{ik}(j)];\quad \forall i,k,j\in\mathrm{V}, \tag{2}$$

где $h_{ik}(j)\in[0;1)$ – характеристика пропущенной ветвью $(ik)$ нагрузки $t_i(j)$. Функция $h_{ik}(j)$ представляет собой условную вероятность прохождения нагрузки $t_i(j)$ через ветвь $(ik)$, при занятости обслуживанием всех предшествующих этой ветви направлений. В дальнейшем, $h_{ik}(j)$ будем называть вероятностью обслуживания нагрузки $t_i(j)$ ветвью $(ik)$, а значение $h_{ik}(j)\cdot t_i(j)$ - пропущенной ветвью $(ik)$ нагрузкой.

Пусть $G^u(j)=\{V^u(j);L^u(j)\}$ – дерево путей передачи нагрузки $t_i(j)$ из узла-источника $u$ до узла-адресата $j$, где $V^u(j)$ - множество всех узлов дерева, $L^u(j)=\{(ik)\,|\,i,k\in V^u(j)\}=\{(i\;k)|\;i,k\;\in\;V^u(j)\}$ – множество его ветвей. Обозначим через $K^u(j)$ упорядоченное множество таких узлов $k$, которые для адресата $j$ образуют все исходящие из узла $i$ направления передачи $(ik)$ в дереве путей $G^u(j)$. Для построения дерева путей между любой парой узлов выбираются соответствующие столбцы матриц маршрутов начального узла (узла-отправителя) и всех транзитных узлов.

При распределении входной нагрузки между парой узлов по ветвям дерева путей в первую очередь выбирается прямой путь назначения, если он имеется и свободен. При занятости прямого пути входная нагрузка направляется по одному из исходящих направлений обходного пути. Порядок выбора обходного пути определяется его длиною, а также числом транзитов (в первую очередь занимаются кратчайшие пути и пути, имеющих меньшее число транзитных участков). Самым последним направлением используется путь последнего выбора. Распределение входной нагрузки по всем последующим ветвям дерева производится на основе вероятностей обслуживания, вычисленных на всех предыдущих ветвях дерева путей. В свою очередь, пропущенная ветвью $(mn) \in L^u(j)$ нагрузка является одновременно и входной нагрузкой для узла $n \in V^u(j)$. Такую нагрузку будем называть транзитной нагрузкой на узле $i$. Пусть $r_i^u(j)$ – входная нагрузка дерева путей $G^u(j)$. Обозначим через $t_i^u(k, j)$ транзитную нагрузку на узле $i$, образующую в процессе распределения входной нагрузки $r_i^u(j)$ по ветвям дерева путей $G^u(j)$ и проходящей через соседний с узлом $i$ узел $k \in K^u(j)$. Нахождение транзитных узлов на каждом узле дерева осуществляется с помощью следующей формулы

$$t_i^u(k, j) = t_l^u(i, j) \cdot h_{li}(j), \tag{3}$$

где $(li) \in L^u(j)$, $i, j, k, l \in V^u(j)$. Следует отметить, так как в любой узел дерева путей, кроме начального, входит только одна ветвь, то на этом узле, независимо от выбора исходящих из него направлений, значения всех транзитных нагрузок будут одинаковыми. Таким образом, для любого узла $i \in V^u(j)$ $(i \neq u)$ и всех узлов $k_m \in K^u(j)$, $m = 1, 2, \ldots s$, имеет место соотношение

$$t_i^u(k_1, j) = t_i^u(k_2, j) = \ldots = t_s^u(k_1, j) = r_i^u(j), \tag{4}$$

где $r_i^u(j)$ - входная нагрузка, поступающая на узел $i$, и предназначенная узлу $j$, $s$ – число исходящих из узла $i$ направлений. Заметим, что в данном случае входные и транзитные нагрузки принципиально не отличаются друг от друга. Ниже будет показано, что транзитные нагрузки удобно использовать при вычислении узловых нагрузок на любом узле графа G, которые в свою очередь передаются соседним узлам по строго установленным направлениям. Другими словами, транзитные нагрузки вводятся для того, чтобы в процессе их передачи исключить циклические маршруты. Входная нагрузка $r_i^u(j)$ для любого узла $i$ распределяется по всем исходящим из него направлениям $(ik) \in L^u(j)$. Пусть $g_{ik}^u(j)$ - средняя интенсивность нагрузки адреса $j$, пропущенная ветвью $(ik) \in L^u(j)$. Очевидно, что

$$g_{ik}^u(j) = t_i^u(k, j)\ h_{ik}(j). \tag{5}$$

Эта формула однозначно определяет структуру распределения входной нагрузки $r_i^u(j)$ по дереву путей $G^u(j)$.

**4. Расчет суммарной пропущенной нагрузки**

Обозначим через $g_{ik}(j)$ - суммарную нагрузку, пропущенной ветвью $(ik) \in L$. Нахождение этой нагрузки для каждой ветви производится путем последовательного накопления на ней всех пропущенных нагрузок каждого дерева путей, т.е.

$$g_{ik}(j) = \sum_u g_{ik}^u(j). \tag{6}$$

Пусть $t_i(k, j)$ - узловая нагрузка по адресу $j$, образуемая на узле $i$ при распределении входных трафиков по соответствующим деревьям путей и предназначенную для передачи соседнему узлу $k \in K_i(j)$. Узловая нагрузка $t_i(k, j)$ в данном случае представляется как совокупность транзитных нагрузок на узле $i$ от всех деревьев путей, т.е.

$$t_i(k,j) = \sum_u t^u(k,i). \tag{7}$$

**Теорема 1.** Для любого узла $i \in V$ формирование узловой нагрузки осуществляется по формуле

$$t_i(k,j) = r(j) + \sum_l t_l(i,j) h_{li}(j), \quad \forall k,j,l \in V. \tag{8}$$

**Доказательство.** Используя соотношения (3), (4) и (7), покажем справедливость формулы (8). На каждом узле $i$ и на каждом направлении $(ik)$ образуется узловая нагрузка

$$t_i(k,j) = \sum_u t^u(k,i) = t_i^i(k,j) + \sum_{u \neq l} t_i^u(k,j) = r_i(j) + \sum_{u \neq i} t_l^u(i,j) h_{li}(j) =$$
$$= r_i(j) + t_l(j) h_{li}(j).$$

Действительно, нагрузка на узле $i$ определяется как сумма входной и узловой нагрузки, поступивший в узел $i$ от соседнего узла $l$. Тогда для всех входящих в узел $i$ направлений ($l\,i$), получим

$$t_i(k,j) = \sum_l [r_i(j) + t_l(j) h_{li}(j)] = r(j) + \sum_l t_l(i,j) h_{li}(j),$$

что и требовалось доказать.

**5. Вычисление статистических параметров.**

Пусть $P_i^u(j)$ – текущая вероятность потерь входной нагрузки $r_i^u(j)$ на всем протяжении дерева путей $G^u(j)$ от узла-источника $i$ до узла-адресата $j$. Тогда величина $Q_i^u(j) = 1 - P_i^u(j)$ представляет собой вероятность обслуживания входной нагрузки на протяжении путей между парой узлов $i$ и $j$. В виду того, что для любых $k \in K_i^u(j)$ значения $p_{ik}(j)$ и $\varphi_{ik}(j)$ берутся из интервала (0;1], то значения $P_i^u(j)$ и $Q_i^u(j)$, для всех $i$, $j \in V^u(j)$, соответственно будут принадлежать интервалам (0;1] и [1;0). Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** При наличии $k \in K_i^u(j)$ исходящих из узла $i$ направлений в дереве путей $G^u(j)$, вероятность обслуживания входной нагрузки $r_i^u(j)$ определяется по формуле

$$1 - P_i^u(j) = \sum_{k \in K_i^u(j)} h_{ik}(j)[1 - P_k^u(j)]. \tag{9}$$

**Доказательство.** Пусть $A_i^u(k,j)$ – событие того, что нагрузка $r_i^u(j)$ будет обслужена на всем протяжении дерева путей $G^u(j)$ между узлами $i$ и $j$, содержащих ветвь $(ik)$. Событие $A_i^u(k,j)$ равно совмещению двух событий: $A_{ik}^u(j)$ – нагрузка $r_i^u(j)$ обслужена ветвью $(ik)$ и $A_k^u(j)$ – нагрузка $r_i^u(j)$ обслужена на всем протяжении путей между узлами $k$, $j$. Очевидно, что событие $A_k^u(j)$ имеет место лишь в том случае, когда осуществляется событие $A_{ik}^u(j)$. Таким образом, вероятность события $A_i(k;j)$ равна

$$Q(A_i^u(k,j)) = Q(A_{ik}^u(j) \cdot A_k^u(j)) = Q(A_{ik}^u(j)) \cdot Q(A_k^u(j) / A_{ik}^u(j)), \tag{10}$$

где Q($A_k^u(j)/A_{ik}^u(j)$) условная вероятность события $A_k^u(j)$. Если учесть, что Q($A_k^u(j)/A_{ik}^u(j)$) = $Q_k^u(j)$=1–$P_k^u(j)$ и по определению $\varphi_{ik}(j)$ следует, что Q($A_{ik}^u(j)$)=$\varphi_{ik}(j)$ [1– $p_{ik}(j)$ ], то выражение (10) принимает следующий вид

$$Q_i\ (A_i^u(k,j)) = \varphi_{ik}(j)[1-p_{ik}(j)\ ][\ 1-P_k^u(j)].$$

При наличии $k \in K_i^u(j)$ исходящих из узла $i$ направлений воспользуемся формулой сложения вероятностей

$$Q_i^u(j) = \sum_{k\in K_i^u(j)} Q_i\ (A_i^u(k,j)) = \sum_{k\in K_i^u(j)} \varphi_{ik}(j)[1-p_{ik}(j)][1-P_k(j)].$$

Учитывая соотношение (2), а также что, $Q_i^u(j) = 1 - P_i^u(j)$, окончательно получим

$$1 - P_i^u(j) = \sum_{k\in K_i^u(j)} h_{ik}(j)[1 - P_k^u(j)].$$

–теорема доказана.

**Теорема 3.** Для всех $(ik) \in L^u(j)$, $i \in V^u$, $k \in K_i^u(j)$ таких, что $P_i^u(j)$ > $P_k^u(j)$, справедливо следующее неравенство

$$\sum_{k\in K_i^u(j)} h_{ik}(j) \ < \ 1 \qquad (11)$$

**Доказательство.** Неравенство $P_i^u(j) > P_k^u(j)$ можно представить в виде

$$Q_k^u(j) = 1 - P_k^u(j) > Q_i^u(j) = 1 - P_i^u(j) \qquad (12)$$

Среди всех $k \in K_i^u(j)$, образующие исходящие направления $(ik) \in L^u(j)$ для дерева путей $G^u$, выбираем наименьшее

$$Q_{\min} = \min_{k\in K_i^u} [1 - P_i^u(j)]$$

Так как $Q_{\min} > 0$, $P_i^u(j) > 0$, $P_k^u(j) > 0$, то из неравенства (10) получаем

$$1 - P_i^u(j) = \sum_{k\in K_i^u(j)} h_{ik}(j)[1 - P_k^u(j)] > Q_{\min} \sum_{k\in K_i^u(j)} h_{ik}(j),$$

или учитывая неравенство (12), окончательно будем иметь

$$\sum_{k\in K_i^u(j)} h_{ik}(j) = \frac{1 - P_i^u(j)}{Q_{\min}} < 1,$$

теорема доказана.

Нагрузку будем считать потерянной в узле, если заняты обслуживание все временные каналы для всех исходящих из него направлениях. Пусть $\Pi_i^u(j)$- вероятность потерь входной нагрузки $r_i^u(j)$ в узле $i$. Тогда

$$\Pi_i^u(j) = \prod_{k \in K_i^u(j)} p_{ik}(j). \quad (13)$$

**Теорема 4.** Для всех ветвей $(ik) \in L^u(j)$ справедлива формула

$$\sum_{k \in K_i^u(j)} h_{ik}(j) = 1 - \Pi_i^u(j). \quad (14)$$

**Доказательство.** Упорядочим все направления $(ik) \in L^u(j)$. Пусть $a$ номер выбираемого направления $(ik_a) \in L^u(j)$, $k_a \in K_i(j)$. Полагая в (1) $k = k_a$ и $\bar{k} = k_{a-1}$, получаем $\varphi_{ik_a}(j) = \varphi_{ik_{a-1}}(j) p_{ik_{a-1}}(j)$. Тогда с учетом (2) получим

$$\sum_{k \in K_i^u(j)} h_{ik}(j) = \sum_{k_a \in K_i^u(j)} h_{ik_a}(j) = \varphi_{ik_1}(j)(1 - p_{ik_1}(j)) + \varphi_{ik_2}(j)(1 - p_{ik_2}(j)) + \ldots +$$
$$\varphi_{ik_{s-1}}(j)(1 - p_{ik_{s-1}}(j)) + \varphi_{ik_s}(j)(1 - p_{ik_s}(j)) = \varphi_{ik_1}(j) - \varphi_{ik_1}(j) p_{ik_1}(j) + \varphi_{ik_2} -$$
$$- \varphi_{ik_2}(j) p_{ik_2}(j) + \ldots + \varphi_{ik_s}(j) - \varphi_{ik_s}(j) p_{ik_s}(j) = \varphi_{ik_1}(j) - \varphi_{ik_s}(j) \quad (15)$$

Из выражения $(15)$, с учетом соотношения $(1)$, получаем

$$\Pi_i^u(j) = \prod_{k_s \in K_i^u(j)} p_{ik_s}(j) = \varphi_{ik_s}(j) p_{ik_s}(j).$$

Подставив последнее выражение в соотношение $(15)$, а также учитывая, что $\varphi_{ik_s}(j) = 1$, получаем равенство $(14)$, тем самым завершая доказательство теоремы.

Используя теоремы 2 и 4, для заданного множества $H = \{h_{ik}(j)\}$ на каждом узле дерева путей легко вычисляются все текущие значения вероятностей потерь. Однако более удобно определять долю нагрузки потерянную в дереве путей, последовательно суммируя доли нагрузки потерянные в транзитных узлах этого дерева. Вероятность потерь между парой узлов $i$ и $j$ определяется как отношение нагрузки, потерянной на всех узлах путей, к поступившей / 3 /. В этом случае вероятное потерь для дерева путей между узлами $i$ и $j$ составит

$$P_i^u(j) = \frac{\sum_{s \in V^u(j)} r_s^u(j) \Pi_s(j)}{r_i^u(j)}, \quad (16)$$

где $V^u(j)$ -подмножество всех узлов дерева путей между узлами $i$ и $j$.

## ЛИТЕРАТУРА


1.Virtual path bandwidth control method for ATM networks: Successive modification method. Shioda Shigeo, Vose Hisae. «Denshi Joho tsushin gakkai ronbunshi. B2-Trans. Inst. Electron., Inf. and Commun. Eng. B2», 1991. 74. №12, pp. 4081-4082.

2.Сети ЭВМ. Под ред. акад.Глушкова - Москва: Связь, 1977, 280 с.. 3.В.Г.Лазарев, Ю.В.Лазарев. Динамическое управление потоками информации в сетях связи - Москва: Радио и связь, 1983, 216 с.60