НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФОРМУЛЫ ЭРЛАНГА

АшигалиевД.У., Тулемисова Г.Е.

*Институт проблем информатики и управления МОН РК, Казахстан, E-mail:*office@ipic.kz

Для широкого круга читателей, занимающихся проблемами телетрафика, хорошо известна классическая задача о пропускной способности полнодоступного пучка телефонных каналов [1,2]. Если в пучке, который обслуживает сколь угодно большое число источников нагрузки, создающих пуассоновский поток вызовов и интенсивностью λ, имеется только v каналов, каждый из которых занимается обслуживанием вызова в среднем на время T, то вероятность потерь сообщения находится при помощи равенства

$$P(A;v)=\frac{A^v}{v!\sum_{j=0}^{v}\frac{A^j}{j!}} \tag{1}$$

называемой формулой Эрланга. Величина $A=\lambda T$ называется нагрузкой и ее интенсивность принято измерять в эрлангах. Вышеназванная задача названа классической потому, что именно с рассмотрения такой задачи Эрлангом и начала развиваться теория массового обслуживания.

В данной работе исследуется формула Эрланга (1) и с помощью математических преобразований получаем ее различные представления, которые на наш взгляд более удобны для вычисления вероятности потерь нагрузки. В частности, приведено доказательство вычисления вероятности блокировки вызова через производные v-го порядка функции A^v, где A- нагрузка сети коммутации каналов, v - число обслуживающих вызовы каналов. В процессе исследования формулы Эрланга получено рекуррентное соотношение подсчета вероятностей потерь и представление этой формулы в интегральном виде.

В начале докажем следующую лемму.

Лемма 1. Для любых $A>0$ и целых $v>0$ выполняется следующее равенство

$$\sum_{s=0}^{v+1}\frac{d^s(A^{v+1})}{dA^s}=A^{v+1}+(v+1)\sum_{s=0}^{v}\frac{d^s(A^v)}{dA^s}, \tag{2}$$

при этом, без потери общности будем полагать, что

$$\frac{d^0(A^{v+1})}{dA^0}=A^{v+1},\quad \frac{d^0(A^v)}{dA^0}=A^v. \tag{3}$$

Доказательство. Раскрывая сумму левой части равенства (2) и вычисляя соответствующие производные, получим следующее выражение

$$\sum_{s=0}^{v+1}\frac{d^s(A^{v+1})}{dA^s}=\frac{d^0(A^{v+1})}{dA^0}+\frac{d^1(A^{v+1})}{dA^1}+\frac{d^2(A^{v+1})}{dA^2}+\ldots=A^{v+1}+(v+1)A^v+v(v+1)A^{v-1}+\ldots=$$

$$=A^{v+1}+(v+1)(A^v+vA^{v-1}+\ldots)=A^{v+1}+(v+1)\sum_{s=0}^{v}\frac{d^s(A^v)}{dA^s},$$

что и требовалось доказать.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. Для любых $A\geq 0$ и целых $v\geq 0$ выполняется следующее равенство

$$v!\sum_{s=0}^{v}\frac{A^s}{s!}=\sum_{s=0}^{v}\frac{d^s(A^v)}{dA^s}. \tag{4}$$

Доказательство. Утверждение данной теоремы будем доказывать с помощью метода математической индукции. Легко проверить, что при $v=1$ равенство (4) выполняется. Предположим, что выражение (4) справедливо и для $v=k$, то есть имеет место равенство

$$k!\sum_{s=0}^{k}\frac{A^s}{s!}=\sum_{s=0}^{k}\frac{d^s(A^k)}{dA^s}.$$

Покажем, что оно справедливо и для $v=k+1$. При $v=k+1$ выражение (4) запишется

$$(k+1)!\sum_{s=0}^{k+1}\frac{A^s}{s!}=\sum_{s=0}^{k+1}\frac{d^s(A^{k+1})}{dA^s}.$$

В силу леммы 1 будем иметь следующее (левую часть последнего равенства преобразуем, а правую его часть заменяем выражением (2))

$$(k+1)!\sum_{s=0}^{k}\frac{A^s}{s!}+A^{k+1}=A^{k+1}+(k+1)\sum_{s=0}^{k}\frac{d^s(A^k)}{dA^s}$$

Сделав несложные преобразования в последнем выражении, окончательно получим утверждение теоремы для предположения $v=k$, тем самым считаем теорему 1 доказанной.

Из вышеуказанной теоремы вытекают два важных следствия.

Следствие 1. Формула Эрланга (1) эквивалентна следующей формуле

$$P(A,v)=\frac{A^v}{\sum\limits_{s=0}^{v}\frac{d^s(A^v)}{dA^s}}. \tag{5}$$

Доказательство этого следствия мы опускаем, ввиду того, что формула (5) очевидна, если знаменатель дроби формулы (1) заменить соотношением (4).

Следствие 2. Имеет место рекуррентная формула подсчета вероятности блокировки

$$P(A,v+1)=\frac{1}{1+\frac{v+1}{AP(A,v)}} \tag{6}$$

Доказательство. Используя (5) для $v=v+1$, а также – формулу(2), получим

$$P(A,v)=\frac{A^{v+1}}{\sum\limits_{s=0}^{v+1}\frac{d^s(A^{v+1})}{dA^s}}=\frac{A^{v+1}}{A^{v+1}+(v+1)\sum\limits_{s=0}^{v}\frac{d^s(A^v)}{dA^s}}$$

Далее, с учетом (1) выражение (4) запишется как

$$\sum_{s=0}^{v}\frac{d^s(A^v)}{dA^s}=\frac{A^v}{P(A,v)}$$

Подставив этот результат в последнее выражение, получим

$$P(A,v+1)=\frac{A^{v+1}}{A^{v+1}+\frac{(v+1)A^v}{P(A,v)}}$$

Разделив числитель и знаменатель этого равенства на величину A^{v+1}, окончательно получим формулу (6), что и требовалось доказать.

Далее произведем следующие преобразования. Введем обозначение

$$H(A,v)=\int_A^{\infty}e^{-y}y^v dy. \tag{7}$$

Нетрудно убедиться, что с другой стороны

$$H(A, v+1) = A^{v+1}e^{-A} + (v+1)H(A, v). \qquad (8)$$

Из (7) следует, что

$$H(A,0) = \int_A^{\infty} e^{-y}dy = e^{-A}. \qquad (9)$$

Теорема 2. Для всех $A \geq 0$ и целых $v \geq 0$ справедлива следующая формула

$$H(A, v) = e^{-A}\sum_{s=0}^{v}\frac{d^s(A^v)}{dA^s}. \qquad (10)$$

Доказательство. Как и для теоремы 1 при доказательстве этой теоремы мы будем использовать метод математической индукции. Пусть $v = 0$, тогда с учетом равенства (9) и как следует из (3) $\frac{d^0(A^0)}{dA^0} = A^0 = 1$, получаем, что $e^{-A} = e^{-A}$, то есть соотношение (10) при $v = 0$ выполняется. Легко проверить, что при $v = 1$, равенство (10) выполняется. Допустим, что формула (10) справедлива и для $v = k$, то есть выполняется равенство

$$H(A, k) = e^{-A}\sum_{s=0}^{k}\frac{d^s(A^k)}{dA^s}. \qquad (11)$$

Покажем, что при $v = k+1$, равенство (10) также выполняется. Для $v = k+1$ выражение (10) запишется

$$H(A, k+1) = e^{-A}\sum_{s=0}^{k+1}\frac{d^s(A^{k+1})}{dA^s}. \qquad (12)$$

Используя соотношения (2) и (8), выражение (12) принимает следующий вид

$$A^{k+1}e^{-A} + (k+1)H(A, k) = e^{-A}[A^{k+1} + (k+1)\frac{d^s(A^k)}{dA^s}],$$

или проведя несложные преобразования легко получить равенство (11), что и доказывает исходную теорему.

Заменяя в формуле (5) знаменатель дроби равенством (10), а также учитывая соотношение (7), мы получим формулу Эрланга в интегральном представлении

$$P(A, v) = \frac{A^v e^{-A}}{\int_A^{\infty} e^{-y}y^v dy}. \qquad (13)$$

Формула (13), в отличие от формулы (1), справедлива для любых произвольных значений v и представляет интерес для многих расчетов, не связанных с заданием целочисленности значений v.

Список литературы

1.Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. М., 1969.

2. Нейман В.И. Теоретические основы единой автоматизированной сети связи. М., 1984.